Esercizi Nona Settimana, 9-13 dic.

1. (a) Calcolare la proiezione ortogonale di $(1,0,0,0)$ sul sottospazio S : $2x - y + 2w - z = x - z = 0$ di $\mathbb{R}^4$.
   (b) Calcolare la dimensione della somma di S col sottospazio
   $$T = \langle (1,3,1,2), (0,0,0,1) \rangle$$
   (c) Dire se la somma è diretta.

2. Determinare le coordinate del vettore $(1,0,0)$ rispetto alla base
$$\mathcal{B} = \{(\sqrt{2},1,0), (-1,\sqrt{2},3), (2\sqrt{2},-4,2\sqrt{2})\}$$

3. Sia U il sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori
$$\mathbf{u}_1 = (1,2,0,1,0), \mathbf{u}_2 = (0,1,1,0,0), \mathbf{u}_3 = (1,1,1,1,1),$$
   (a) Determinare delle equazioni cartesiane del sottospazio U;
   (b) Determinare delle equazioni del sottospazio $U^\perp$, complemento ortogonale di U;
   (c) Scrivere il vettore $\mathbf{v} = (2,2,3,4,4)$ come somma di un vettore di U e uno di $U^\perp$.

4. Diagonalizzare ortogonalmente, se possibile, le seguenti matrici:
   (a)
   $$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$
   (b)
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

1. (a) Proiezione ortogonale:
   $$\left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}, -\frac{2}{11}, \frac{5}{11} \right)$$
   (b) $\dim(S+T) = 3$.
   (c) La somma non è diretta.
   (d) Le coordinate α, β, γ sono:
   $$\alpha = \frac{(1,0,0) \times (\sqrt{2},1,0)}{(\sqrt{2},1,0) \times (\sqrt{2},1,0)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \ , \ \beta = -\frac{1}{12} \ , \ \gamma = \frac{\sqrt{2}}{16} \ .$$

(e) Equazioni cartesiane di U:

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

(f) Equazioni cartesiane di $U^{\perp}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

(g)

$$(2,2,3,4,4) = (-\frac{9}{8}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{2}{8}) + (\frac{25}{8}, \frac{15}{8}, \frac{25}{8}, \frac{25}{8}, \frac{30}{8})$$

2. La matrice ortogonale

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

diagonalizza A.

3. La matrice ortogonale

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

diagonalizza A.