Esercizi Ottava Settimana.

1. Per ciascuna delle seguenti matrici calcolare il polinomio caratteristico, gli autovalori, la molteplicità algebrica e geometrica di ciascun autovalore; dire se la matrice è diagonalizzabile ed eventualmente determinare la sua forma diagonale D e la matrice diagonalizzante P.

   (a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (c)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -\frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & 3 \end{pmatrix}$$

   (d)
$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

   (e)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

   (f)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

   (g)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Che relazione c'è tra gli ultimi tre esempi precedenti. Se ne può estrarre una regola generale?

3. Vero o falso?

   (a) Se una matrice è invertibile allora è diagonalizzabile.

   (b) Se una matrice ha autovalore nullo allora non può essere invertibile.

4. Determinare per quali valori del parametro reale k la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & k \\ 6 & 3 & 6 \\ -k & -1 & -k \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per ciascuno di questi valori di k determinare una matrice diagonalizzante.

1. **Soluzione.**

   (a) Polinomio caratteristico: $(x-1)(x-3)(x+1)$
   Autovalori: $1, 3, -1$ tutti di molteplicità algebrica 1.
   La molteplicità geometrica è 1 per ciascuno di essi.
   La forma diagonale è uguale ad essa: $D = A$
   La matrice diagonalizzante è $P = I$ (matrice identità).

   (b) Polinomio caratteristico: $(x-1)(x-3)(x+1)$
   Autovalori: $1, 3, -1$ tutti di molteplicità algebrica 1.
   La molteplicità geometrica è 1 per ciascuno di essi.
   La forma diagonale è:

   $$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   La matrice diagonalizzante è

   $$\begin{pmatrix} -1 & -7 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

   (c) Polinomio caratteristico: $(x-1)(x-2)^2$
   Autovalori: 1 di molteplicità algebrica 1, e 2 di molteplicità algebrica 2.
   La molteplicità geometrica di ciascuna radice invece è 1 per entrambi (verificare). Per la condizione necessaria e sufficiente, essendo le molteplicità algebrica e geometrica diverse per almeno un autovalore, ne segue che la matrice non è diagonalizzabile.

   (d) Polinomio caratteristico: $(x-1)(x-3)^2$
   Autovalori: 1 di molteplicità algebrica 1, e 3 di molteplicità algebrica 2.
   La molteplicità geometrica: 1 di molteplicità geometrica 1, 3 di molteplicità geometrica 2 . Poiché le molteplicità coincidono per ogni autovalore allora la matrice è diagonalizzabile.

La forma diagonale è:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice diagonalizzante è

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(e) Polinomio caratteristico: $(x+1)x$

Autovalori: -1 di molteplicità algebrica 1, e 0 di molteplicità algebrica 1.

La molteplicità geometrica è 1 per entrambi e dunque la matrice è diagonalizzabile.

La forma diagonale è:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice diagonalizzante è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(f) Polinomio caratteristico: $x^2 + 2x - 1$

Autovalori: $-1-\sqrt{2}$ di molteplicità algebrica 1, e $-1+\sqrt{2}$ di molteplicità algebrica 1.

La molteplicità geometrica è 1 per entrambi e dunque la matrice è diagonalizzabile.

La forma diagonale è:

$$D = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La matrice diagonalizzante è

$$\begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{2}}{2} & \frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(g) Polinomio caratteristico: $(x^2 + 2x - 1)x(x+1)$

Autovalori: $-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}, -1, 0$ tutti di molteplicità algebrica 1.

La molteplicità geometrica è 1 per tutti e dunque la matrice è diagonalizzabile.

La forma diagonale è:

$$D = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice diagonalizzante è

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2}\right) & \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}\right) & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Osserviamo che la matrice 4×4 è una matrice che si può pensare come matrice "diagonale a blocchi", cioè se indichiamo con $B_1, B_2 = 0, B_3 = 0, B_4$ le quattro sottomatrici di ordine 2 in

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

essa è del tipo

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}$$

In tale situazione si può verificare che $\det A = \det B_1 \det B_4$ e di conseguenza anche il polinomio caratteristico si fattorizza nel prodotto dei polinomi caratteristici dei due blocchi B_1, B_4. Stessa cosa per le matrici diagonalizzanti.

3. **Soluzione.**

   (a) Falso.

   (b) Vero.

4. Il polinomio caratteristico di A_k è

$$x^2(x-3).$$

Autovalore $x = 0$ con molteplicità 2, e $x = 3$, semplice. La molteplicità geometrica dell'autovalore 3 è 1. La motleplicità geometrica dell'autovalore 0 dipende dal rango k

Per $k \neq 2$ la matrice non è diagonalizzabile.

Per $k = 2$ la matrice è simile alla matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Una matrice diagonalizzante è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$