Esercizi Sesta Settimana.

1. Scrivere l'equazione cartesiana della circonferenza di centro $P_0(2, -1)$ e raggio 3. Dire se il punto $P_1(1, 1)$ è interno, esterno o appartenente a tale circonferenza.

2. Verificare che i punti $P_1(1, -1), P_2(0, 1), P_3(2, 1)$ non sono allineati. Scrivere un'equazione cartesiana per la circonferenza C passante per P_1, P_2, P_3.

3. Sono date la circonferenza $C : x^2 + y^2 - 2x + 10y + 1 = 0$ e la retta $r : 2x + y + 5 = 0$ Determinare i punti comuni a c e r.

4. È data la circonferenza C di equazione $x^2+y^2-6x+2y+8 = 0$. Considerato il punto $P(3, 1)$
   (a) verificare che P è esterno a C
   (b) scrivere equazioni per le tangenti t_1, t_2 a C condotte da P
   (c) determinare le coordinate dei punti di tangenza P_1, P_2.

5. È data la circonferenza C di equazione cartesiana $x^2+y^2-6x-2y+5 = 0$. Considerate le rette (parallele) $r : x + 2y + 1 = 0$, $s : x + 2y - 4 = 0$
   (a) verificare che r è esterna a C e s è secante a C
   (b) determinare le rette parallele a r, s che sono tangenti a C.

6. Sia data la parabola di equazione $y = x^2$ e i punti $O(0, 0)$ e $P(1, 1)$. Determinare tutti i punti Q appartenenti alla parabola in modo che il triangolo di vertici O, P, Q abbia area 1.

7. Riconoscere che il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ è perpendicolare al piano π di equazione $3x - y - 2z - 1 = 0$

8. Verificare che i piani $\alpha : x + y - z = 0$ e $\beta : x + y + 2z - 1 = 0$ sono perpendicolari.

9. Calcolare l'area del triangolo di vertici $A(-1, 1, 2), B(0, 1, 3), C(1, 2, 0)$.

10. Calcolare il coseno dell'angolo formato dalle rette

$$r : \begin{cases} 2x - y - z + 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

orientata secondo le y crescenti, ed

$$s : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

orientata secondo il parametro t decrescente. Calcolare i coseni degli angoli che la retta r forma rispettivamente con gli assi coordinati x, y, z (orientati positivamente).

11. Considerati i punti $P_1(-1,1,1), P_2(3,-1,5), P_3(0,1,-1), P_4(1,0,3), P_5(1,0,1)$
    (a) Verificare che P_1, P_2, P_3 non sono allineati;
    (b) Verificare che P_4 appartiene al piano individuato da P_1, P_2, P_3;
    (c) Verificare che P_5 non appartiene a tale piano;
    (d) Scrivere equazioni parametriche per il piano individuato da P_1, P_2, P_3.

12. Scrivere l'equazione cartesiana del piano α per il punto $P_0(-1,0,1)$ parallelo al piano $\beta : x - y + z + 3 = 0$.

Soluzione.

1.
$$\boxed{x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0}$$

2.
$$\boxed{2x^2 + 2y^2 - 4x - y - 1 = 0}$$

3. I punti comuni sono
$$(\frac{12}{5}, -\frac{49}{5}), (-2, 1)$$

4. Le rette sono
$$\boxed{x + y - 4 = 0} \text{ e } \boxed{x - y - 2 = 0}$$
I punti di tangenza $(4,0)$ e $(2,0)$.

5. Le rette tangenti sono
$$\boxed{x + 2y = 0} \text{ e } \boxed{x + 2y - 10 = 0}$$

6. I punti cercati sono
$$\boxed{(2,4)} \text{ e } \boxed{(-1,1)}$$

7.
$$rg\begin{pmatrix} -6 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

8. $1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 0$

9. L'area è
$$\frac{\sqrt{18}}{2}$$

10.
$$\cos \widehat{rs} = \frac{7}{2\sqrt{21}}$$
$$\cos \widehat{xr} = \tfrac{2}{\sqrt{14}},\ \cos \widehat{yr} = \tfrac{1}{\sqrt{14}},\ \cos \widehat{zr} = \tfrac{3}{\sqrt{14}}.$$

11.
$$\begin{cases} x = -1 + 4t + t' \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 4t - 2t' \end{cases}$$

12.
$$\boxed{x - y + z = 0}$$