

Esercitazione tutoraggio diffuso Geometria (Settimana 11 -
15 novembre)
Funzioni lineari/Geometria del piano

Funzioni Lineari

1. Si scriva la matrice che rappresenta la funzione identità in $\mathbb{R}^3$, vale a dire $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$, rispetto al riferimento $B = \{(1, 0, 1), (-1, 2, 1), (3, 4, 1)\}$ per il dominio e il riferimento $B' = \{(0, 1, 0), (1, 1, 0), (2, 1, 1)\}$ per il codominio.
2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una funzione lineare tale che $f(1, 3, 1) = (1, 0)$ e $f(0, 1, 2) = (-2, 1)$. Calcolare, se è possibile, $f(0, 0, 0)$, $f(1, 4, 3)$ e $f(2, 0, 0)$.
3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rappresentata dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ rispetto alle basi canoniche. Determinare la dimensione e una base per $\text{Ker} f$ e $\text{Im} f$. La funzione f è invertibile? Se A invece rappresentasse f rispetto al riferimento $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ (sia per il dominio che per il codominio), quale sarebbe una base per $\text{Ker} f$ e $\text{Im} f$? Quanto varrebbe $f(1, 0, 0)$?

Soluzioni

1. La matrice è $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Si ha $f(0, 0, 0) = (0, 0)$ qualsiasi sia la funzione lineare f . $f(1, 4, 3) = f(1, 3, 1) + f(0, 1, 2) = (1, 0) + (-2, 1) = (-1, 1)$. $(2, 0, 0)$ non è combinazione lineare di $\{(1, 3, 1), (0, 1, 2)\}$, quindi non si può dire quanto vale $f(2, 0, 0)$.
3. $\dim \text{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \rho(A) = 3 - 2 = 1$, $\dim \text{Im} f = \rho(A) = 2$. La funzione non è né inettiva né suriettiva, quindi non è invertibile. Una base per $\text{Im} f$ è $\{(1, 1, 2), (0, 2, 2)\}$. Una base per $\text{Ker} f$ è $\{(-2, 1, -2)\}$. Se A rappresentasse f rispetto al riferimento B , si avrebbe comunque $\dim \text{Ker} f = 1$ e $\dim \text{Im} f = 2$. Una base per $\text{Ker} f$ sarebbe $\{(-4, -3, -1)\}$. Una base per $\text{Im} f$ potrebbe essere $\{(3, 4, 3), (2, 4, 4)\}$. $f(1, 0, 0) = (-4, -6, -5)$.

Geometria Analitica nel piano

1. Sia r la retta passante per i punti $A = (1, 0)$ e $B = (3, 2)$. Trovare la retta per $P = (1, 2)$ parrallela a r e la retta per P ortogonale a r .
2. Determinare la retta del fascio di equazione $h(x + 2y + 1) + k(2x - y - 1) = 0$ parrallela a $r : 2x - y = 0$ e la retta del fascio passante per l'origine.
3. Trovare i vettori paralleli a $r : x + 2y - 1 = 0$ di modulo 1 e 2.
4. Trovare la bisettrice degli angoli formati dalle rette $r : x - y = 0$ e $s : 2x + 3y = 0$.

Soluzioni

1. La retta per P parrallela a r è $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \end{cases}$. La retta per P ortogonale a r è $x + y - 3 = 0$.
2. La retta del fascio parrallela a r ha equazione $2x - y - 1 = 0$. La retta del fascio passante per l'origine ha equazione $3x + y = 0$.
3. I vettori di modulo 1 sono $\pm \frac{1}{\|(-2, 1)\|}(-2, 1) = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$. I vettori di modulo 2 sono $\pm \frac{2}{\|(-2, 1)\|}(-2, 1) = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}(-2, 1)$.
4. Le due bisettrici hanno equazione

$$(1 - 2\sqrt{\frac{2}{13}})x - y(1 + 3\sqrt{\frac{2}{13}}) = 0,$$

$$(1 + 2\sqrt{\frac{2}{13}})x - y(1 - 3\sqrt{\frac{2}{13}}) = 0.$$