

Esercitazione tutoraggio diffuso Geometria (Settimana 4 - 8 novembre)
Componenti di un vettore rispetto ad una base, Sottospazi di $\mathbb{R}^n$

1. Si consideri la base $B = \{(1, 0, 1), (2, 1, 0), (0, 1, 0)\}$ di $\mathbb{R}^3$. Trovare le componenti dei seguenti vettori rispetto a tale base: $(0, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(3, 2, 1)$.
2. Sia $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 - x_2 + x_3 = 0, 2x_1 - x_2 + x_4 = 0\}$ e sia $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$. Determinare la dimensione e una base per: $V + W$ e $V \cap W$.
3. Sia $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ e $U = \langle (1, -1, 0, 1), (2, 0, 0, 3) \rangle$. Determinare la dimensione ed una base per $V, U \cap V$ e $U + V$.
4. Sia $V = \langle (-1, 0, -1, 1), (1, 1, 2, -2) \rangle$ e $U = \langle (2, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 4) \rangle$. Determinare la dimensione ed una base per $V + U$ e $U \cap V$.

Soluzioni

1. $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $\dim V \cap W = 0$, $\dim V + W = 4$, dunque $V + W = \mathbb{R}^4$ e si può scegliere una qualsiasi base di $\mathbb{R}^4$.
3. $\dim V = 4 - 1 = 3$. Una possibile base è $B_V = \{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$. Tre vettori combinazione lineare di B_V che formano un insieme indipendente sono una base per V . $\dim U \cap V = 1$ e una base è $\{(1, -1, 0, 1)\}$; un qualsiasi multiplo non nullo di tale vettore è una base per $\dim U \cap V = 1$. $\dim U + V = 4$ e quindi $U + V = \mathbb{R}^4$.
4. $\dim U + V = 4$ e quindi $U + V = \mathbb{R}^4$. $\dim U \cap V = 1$ e una possibile base per $U \cap V$ è $\{(-1, 7, 6, -6)\}$, o un qualsiasi suo multiplo diverso da $(0, 0, 0, 0)$.