Esercitazione tutoraggio diffuso Geometria (Settimana 28 ottobre - 1 novembre)
Insiemi di generatori, insiemi indipendenti, basi

1. Quali tra questi insiemi sono generatori di $\mathbb{R}^3$: $S_1 = \{(1, 2, 4), (-1, 0, 1)\}$, $S_2 = \{(1, 0, 1), (-1, 2, 3), (1, 2, 5)\}$, $S_3 = \{(2, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 2, 1)\}$.
2. Dire per quali valori del parametro k il seguente insieme è una base per $\mathbb{R}^3$: $\{(-1, 0, k), (k, 2, -2), (k, 0, -1)\}$.
3. Dire se i seguenti insiemi sono sottospazi di $\mathbb{R}^4$: $S_1 = \{(a, b, 2b - a, 0), a, b \in \mathbb{R}\}$, $S_2 = \{(a, a + 1, b, a + 3b), a, b \in \mathbb{R}\}$, $S_3 = \{(a, ab, b, c), a, b, c \in \mathbb{R}\}$.
4. Completare, se è possibile, i seguenti insiemi ad una base di $\mathbb{R}^4$. $S_1 = \{(1, 2, 3, 0), (-2, -4, 1, 1)\}$, $S_2 = \{(1, 7, 6, 1), (1, 2, 0, 1), (0, 0, 0, 0)\}$.
5. Dati sottospazi $U = \langle (-4, -1, 7, 1), (-2, 1, 1, 1) \rangle$ (attenzione: per alcuni la simbologia è $U = L((-4, -1, 7, 1), (-2, 1, 1, 1))$) e $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, x_1 - x_2 + 3x_4 = 0\}$, si ha $U \subseteq W$? Si può dire che $U = W$?

Soluzioni

1. Solo S_3 .
2. L'insieme è una base per $k \neq \pm 1$.
3. Solo S_1 è un sottospazio.
4. Solo l'insieme S_1 si può completare ad una base, ad esempio $B = \{(1, 2, 3, 0), (-2, -4, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$ oppure $B = \{(1, 2, 3, 0), (-2, -4, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$...
5. Si ha $U = W$.