Esercitazione tutoraggio diffuso Geometria (Settimana dal 21 al 25 ottobre)
Determinante, rango e inversa di matrici

Esercizio 1. Calcolare il determinanate della matrice $A = v \cdot u^T$, dove $v = (1,-2,4), u = (-2,4,1)$, e della matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Si poteva prevedere $\det A$? E $\det B$?

R. $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 4 & -8 & -2 \\ -8 & 16 & 4 \end{pmatrix}$**,** $\det A = 0$**,** $B = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$, $\det(B) = 22$**.**

Esercizio 2. Calcolare il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ utilizzando le trasformazioni elementari.

R. $\det A = 33$.

Esercizio 3. Dire se la seguente matrice è invertibile e, in caso di risposta affermativa, calcolarne l'inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

R. La matrice A si può dividere in blocchi e dunque si ottiene $A = \begin{pmatrix} O_{2,2} & I_2 \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix}$. Dunque $\det(A) = \det(A_1) \neq 0$. La matrice inversa $B = A^{-1}$ la possiamo allora dividere in blocchi del medesimo ordine, dunque $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_3 \end{pmatrix}$. Quindi bisogna avere $A \cdot B = \begin{pmatrix} B_3 & B_4 \\ A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_3 & A_1 \cdot B_2 + A_2 \cdot B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & O_{2,2} \\ O_{2,2} & I_2 \end{pmatrix}$. Dunque $B_3 = I_2$, $B_4 = O_{2,2}$, $A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_3 = O_{2,2} \Rightarrow B_1 = -A_1^{-1} A_2$ (infatti A_1 è invertibile!), $A_1 \cdot B_2 + A_2 \cdot B_4 = I_2 \Rightarrow B_2 = A_1^{-1}$.