Esercizi di ripasso.

1. Diagonalizzare ortogonalmente le seguenti matrici.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

   (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Se A e B sono simmetriche, giustificare perché $A + B$ è diagonalizzabile.

3. Dimostrare che una matrice simmetrica di ordine due ha necessariamente autovalori reali.

4. Determinare la retta per $P(1, 5, 1)$ parallela ai piani $\pi_1 : x - y + z = 0$ e $\pi_2 : 2x - y + 3z = 7$

5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{P}_4$ dei polinomi in x di grado minore o uguale a 4, spiegare se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi o meno. Se lo sono calcolarne la dimensione.

   (a) $S = \{p(x) \in \mathbb{P}_4 | p(0) = 1\}$;

   (b) $T = \{p(x) \in \mathbb{P}_4 | p(1) = 0\}$

6. Calcolare la distanza tra le due seguenti rette:

$$r_1 : \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 4 \\ y = -z + 1 \end{cases}$$

7. Uno spazio vettoriale V ha la proprietà di contenere due sottospazi di dimensione 5 la cui intersezione è il solo vettore nullo. Stabilire se $\dim(V)$ può essere uguale a 10 e se essa può essere uguale a 11.

8. Esibire una base del sottospazio $\langle(1, 2, 3, 1), (1, 2, 4, 1)\rangle + \langle(1, 2, 5, 1), (1, 0, 0, 1)\rangle$. Verificare la validità della formula di Grassmann in questo contesto, calcolando esplicitamente la dimensione dell'intersezione dei due sottospazi.

9. In $\mathbb{R}^5$ sono dati i due sottospazi $S : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$ e $T : x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = 0$. Dimostrare che $S + T = \mathbb{R}^5$.

Soluzioni.

1. La matrice ortogonale che diagonalizza A è

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}$$

2. Il polinomio caratteristico è $c_A(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$. Gli autovalori sono $3, -1, 1$. Una matrice diagonalizzante ortogonale è

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Se A e B sono simmetriche, anche la loro somma è simmetrica e allora, per il Teorema degli assi principali (Teorema spettrale) essa è diagonalizzabile ortogonalmente. In particolare è diagonalizzabile.

2. Il polinomio caratteristico di una matrice simmetrica di ordine 2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ è $x^2 - (a+c)x + (ac - b^2)$. È facile vedere che il discriminante di questa equazione di secondo grado è sempre maggiore o uguale a zero.

3. $$\begin{cases} x = 2y - 9 \\ x = -2z + 5 \end{cases}$$

   oppure

   $$\begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ 2x - y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$$

4. (a) S non è un sottospazio.

   (b) T è un sottospazio di dimensione 4

5. La distanza è

   $$\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

6. Le risposte sono entrambe affermative.

7. Il sottospazio somma ha dimensione 3. Una sua base è data ad es. dagli ultimi tre vettori.

   L'intersezione è il sottospazio $\langle (1, 2, 5, 1) \rangle$.

8. La matrice

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   ha rango 5.