

Esercitazione tutoraggio diffuso Analisi 1 (Settimana 25- 29 novembre)

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2 - 10x^4}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}$ **R. 12**

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 10x^4}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}$ **R. $-\infty$**

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{(x-1)} - \sin(x-1) - 1}{\arcsin^2(x-1)}$ **R. $\frac{1}{2}$**

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + xe^{x/2}}{\log(1+e^x)}$ **R. $+\infty$**

Esercizio 2. Stabilire se la funzione $f(x) = (1+2x)^{-\frac{\sin x}{x^4}}$ definita in $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \setminus \{0\}$ è prolungabile con continuità in $x_0 = 0$.

R. Sì, $\tilde{f}(x) = \begin{cases} (1+2x)^{-\frac{\sin x}{x^4}} & x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Esercizio 3. Stabilire se la funzione $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-2} \log(x-1) - [\sin(x-2)]^{4/3}}{[e^{2x-4} - 1]^{7/3}}$ definita in $(1, +\infty)$ è prolungabile con continuità in $x_0 = 2$. **R. Sì,** $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (1, 2) \cup (2, +\infty) \\ -\frac{1}{4\sqrt[3]{2}} & x = 2 \end{cases}$

Esercizio 4. Stabilire se le seguenti funzioni sono continue e derivabili nel loro dominio:

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x^4} - 1}{\log(1+x^2)} & x < 0 \\ \frac{x^4 + 2x}{x^2 + 4x + 3} & x \geq 0 \end{cases}$ **R. continua ma non derivabile in $x_0 = 0$, x_0 punto angoloso**

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{2x}) & x > 0 \\ \frac{x^4 + 2x^5}{(x-1)^2} & x \leq 0 \end{cases}$ **R. continua e derivabile in $x_0 = 0$**

3. $f(x) = \frac{x^2 \sqrt{|x+3|}}{1+x^2}$ **R. continua ma non derivabile in $x_0 = -3$, x_0 punto di cuspidè**

4. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x-1}} - 1}{x^2 + 2} & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ **R. non continua e non derivabile in $x = 1$, discontinuità di seconda specie**

Esercizio 5. Studiare la continuità della funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{3 \sin(x^2) - \alpha x^2}{3x^5 + 2x^2} & x > 0 \\ \frac{3^{x+1} - \alpha}{1 + \alpha^2} & x \leq 0 \end{cases}$ **R. continua per $\alpha = 3; \pm 1$, x_0 punto di salto per $\alpha \neq 3; \pm 1$**

Esercizio 6. Studiare le seguenti funzioni e tracciarne un grafico qualitativo:

1. $f(x) = \sqrt{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} + 5;$

2. $f(x) = x \log x - \frac{1}{(x-1)^2} - x;$

3. $f(x) = x^3 e^{1-x^2};$

4. $f(x) = x^3 + x^2 + 3x - |x|;$

5. $f(x) = |x-1| \sqrt{x+2};$

6. $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 - 4};$

7. $f(x) = (\log x)^2 + 2 \log x;$

8. $f(x) = \arctan \left| \frac{x+1}{x} \right|.$