Esercitazione tutoraggio diffuso Analisi 1 (Settimana 4 - 8 novembre)

Esercizio 1. Calcolare al variare di $x \in \mathbb{R}$

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+4^n \cos^{2n} x}$

   R. $\begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se}\, x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{se} - \frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{se} - \pi + 2k\pi < x < -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \vee -\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2. $\lim_{n\to+\infty} \left(\sin^2 x + \frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+1}$

   R. $\begin{cases} e & \text{se}\, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{se}\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Esercizio 2. Dimostrare che le due successioni

$$a_n = \log n + n^2 + 3 + 10^n, \qquad b_n = \log^2 n + \sqrt{n} + 4 \cdot 10^{n+1}$$

sono asintotiche. **R.** $a_n \sim \frac{1}{40} b_n$

Esercizio 3. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \log(n + 2^n) \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}. \qquad \textbf{R.}\ \frac{\log \mathbf{2}}{\mathbf{e}}$$

Esercizio 4. Determinare l'ordine di infinitesimo α della successione $a_n = \log(2 - \cos \frac{1}{\sqrt[5]{n^2}})$. **R.**$\alpha = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$

Esercizio 5. Calcolare i seguenti limiti:

- $\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\log(1 - \frac{1}{n}) - \log(1 + \frac{1}{n})\right)$ **R.** -1
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(\log(n+\log n))\cdot\log(2n+1)}{(2n+3)^2\cdot\log^2 n}$ **R.** $\frac{1}{4}$
- $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+2}{n-1}\right)^{2n}$ **R.** e^6
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{\log n} + \cos n + e^{2n^2+1}}{n^4 + \sin^2 n + e^{2n^2}}$ **R.** e